



هم کلاسی
Hamkelasi.ir

جزوه آموزش

هندسه ۲

یازدهم ریاضی

کارک از استاد بابالویان

فصل اول : دایره

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

درس دوم : رابطه های طولی در دایره

درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

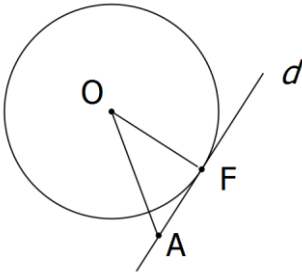
درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

با مفهوم دایره و بعضی از ویژگی های آن آشنا شدیم حالا می خواهیم با ویژگی های دیگرش آشنا بشیم و حتی این ویژگی ها رو اثبات کنیم .

قضیه : یک خط و یک دایره بر هم مماسند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن عمود باشد .

اثبات : چون قضیه دو شرطی هستش باید هر دو طرف ثابت بشه !!

⇐ فرض کنید خط d بر دایره در نقطه F مماس است پس هر نقطه دیگرمانند A روی خط d خارج از دایره است پس $OA > OF$ و این یعنی OF کوتاه ترین فاصله بین نقطه O و خط d است پس خط d بر شعاع OF عمود است .

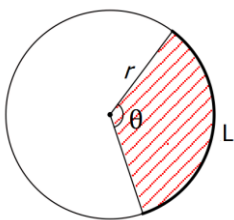


⇒ فرض کنید خط d بر شعاع OF عمود باشد پس برای هر نقطه دیگرمانند A روی خط $OA > OF$ (و تر بزرگ ترین ضلع مثلث قائم الزویه است) لذا تمام نقاط روی خط d به جز F خارج از دایره است پس تنها نقطه تماس F است و خط d بر دایره مماس است .

تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای روی آن را توضیح دهید .

طول کمان و مساحت قطاع :

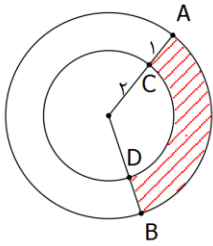
با توجه به محیط و مساحت دایره طول کمان و مساحت قطاع مربوط به زاویه مرکزی θ رادیان را می توان به کمک تناسب بدست آورد :



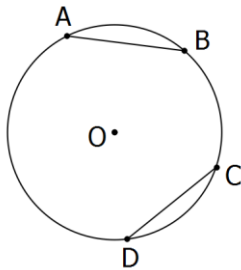
$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow L = r\theta$$

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

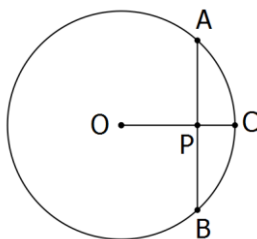
تمرین: طول کمان های AB, CD مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید.



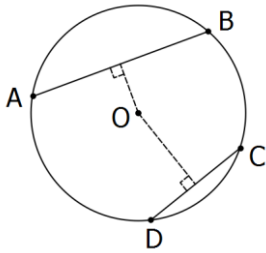
تمرین: ثابت کنید در یک دایره طول کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.



تمرین: ثابت کنید اگر در یک دایره شعاع بر وتر عمود باشد آن وتر و کمان مقابلش را نصف می کند و برعکس.



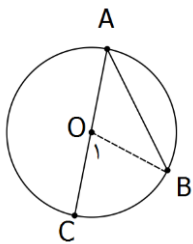
تمرین: ثابت کنید از دو وتر یک دایره آنکه به مرکز نزدیک تر است بزرگ تر است و برعکس.



قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن.

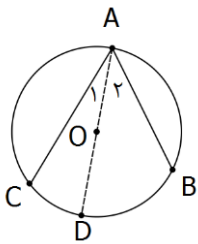
اثبات:

الف) فرض کنید یکی از اضلاع زاویه از مرکز دایره می گذرد. در این صورت با وصل کردن نقاط B و O داریم:



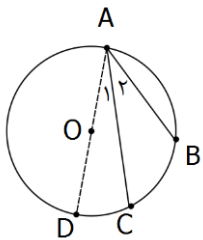
$$\left. \begin{array}{l} O \setminus = A + B \\ A = B \end{array} \right\} \Rightarrow O \setminus = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} O \setminus \Rightarrow A = \frac{1}{2} BC$$

ب) فرض کنید اضلاع زاویه اطراف مرکز دایره باشد. با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم:



$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2} CD \\ A_2 = \frac{1}{2} BD \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{1}{2} (CD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2} BC$$

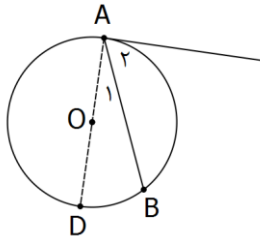
ج) فرض کنید اضلاع زاویه در یک طرف مرکز باشد. با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم:



$$\left. \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} BD \\ A_1 = \frac{1}{2} DC \end{array} \right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2} (BD - DC) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} BC$$

تمرین: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل آن.

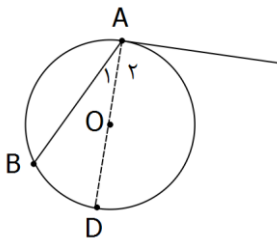
اثبات:



الف) اگر زاویه ظلی حاده باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم:

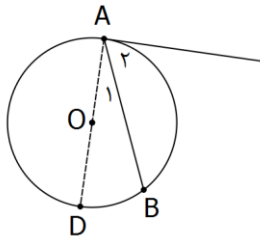
$$\left. \begin{array}{l} A = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2} AD \\ A_1 = \frac{1}{2} BD \end{array} \right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2} (AD - BD) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} AB$$

ب) اگر زاویه ظلی منفرجه باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم:

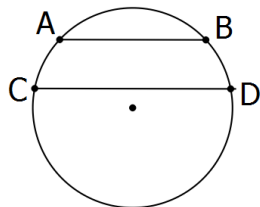


$$\left. \begin{array}{l} A_2 = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2} AD \\ A_1 = \frac{1}{2} BD \end{array} \right\} \Rightarrow A_2 + A_1 = \frac{1}{2} (AD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2} AB$$

تمرین: قضیه قبل را با وصل کردن B به D و در یک مرحله ثابت کنید.

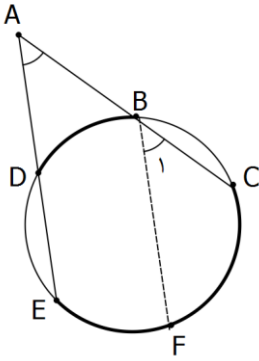


تمرین: ثابت کنید دو وتر از دایره با هم موازیند اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند.



تعمیم: زاویه حاصل از برخورد دو وتر در بیرون از دایره برابر با نصف تفاضل اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند.

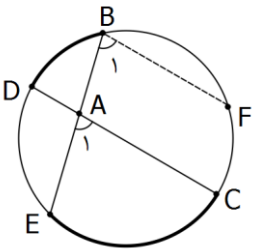
اثبات: از نقطه B وترى موازی DE رسم می کنیم در این صورت:



$$A = B \Rightarrow \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2} (EC - EF) \xrightarrow{EF=BD} A = \frac{EC - BD}{2}$$

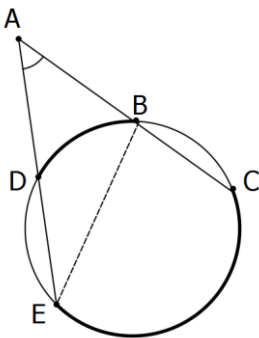
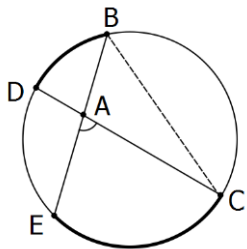
تعمیم: زاویه حاصل از برخورد دو وتر در درون دایره برابر با نصف مجموع اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند.

اثبات: از نقطه B وترى موازی DC رسم می کنیم در این صورت:



$$A = B \Rightarrow \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} (EC + FC) \xrightarrow{FC=BD} A = \frac{EC + BD}{2}$$

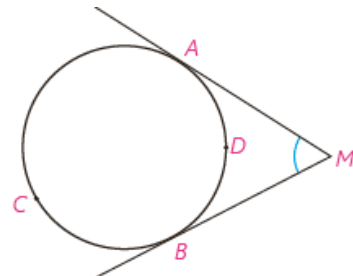
تمرین: قضیه قبل را با وصل کردن B به C و قضیه قبلی آن را با وصل کردن B به E اثبات کنید.



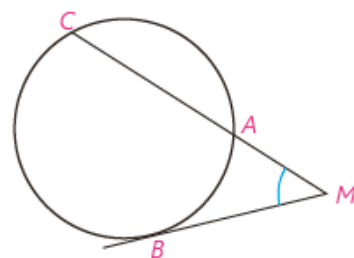
تمرین های کتاب صفحات ۱۶ و ۱۷ :

۱- در شکل های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.

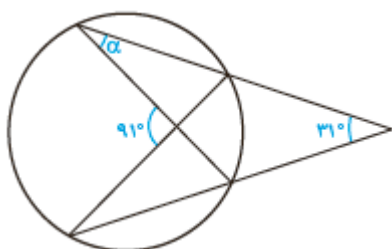


$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{الف})$$



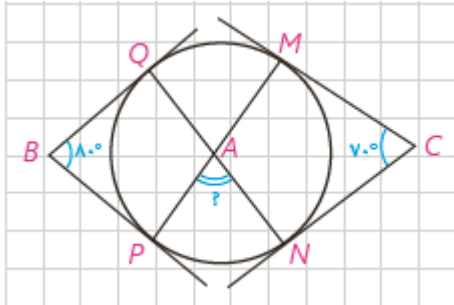
$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \quad (\text{ب})$$

۲- در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

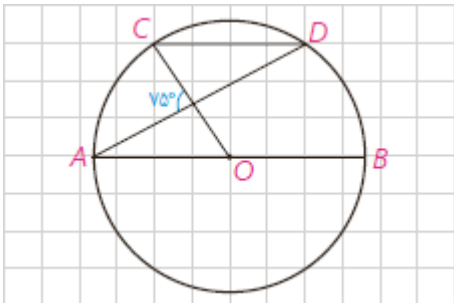


۳- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه \hat{A} چند درجه

است؟

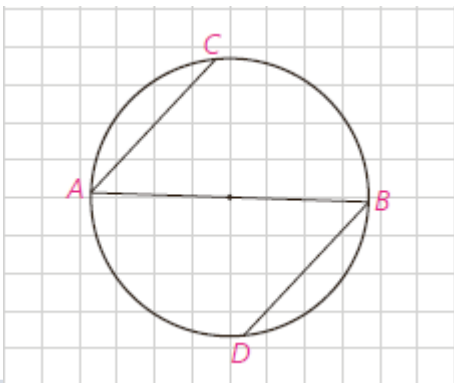


۴- در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.

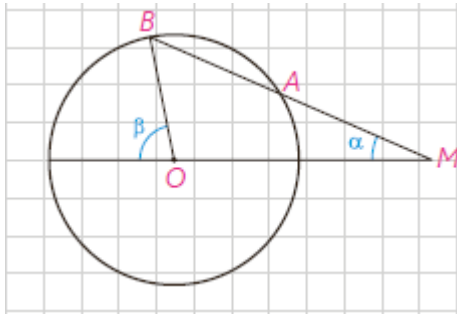


۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

ثابت کنید: $AC = BD$



۶- دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$



۷- در دایره $C(O,R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

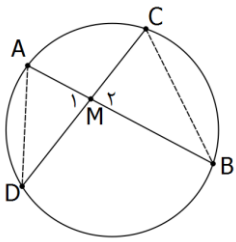
درس دوم : رابطه های طولی در دایره

توضیح : هرگاه خط هایی شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) همدیگر را قطع کنند .

آنگاه : $MA.MB = MC.MD$

الف) اگر درون دایره همدیگر را قطع کنند :

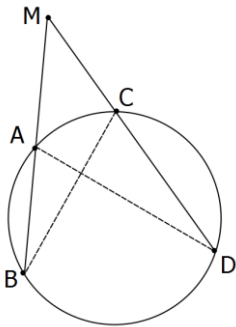
A را به D و B را به C وصل می کنیم :



$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{AC}{\sphericalangle} = D \\ M_{\sphericalangle} = M_{\sphericalangle} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز}} \triangle ADM \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

ب) اگر بیرون دایره همدیگر را قطع کنند :

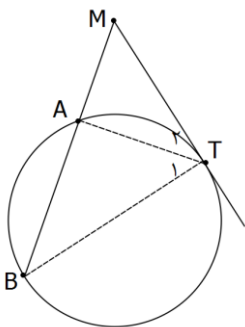
A را به D و B را به C وصل می کنیم :



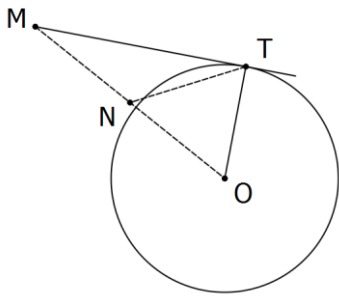
$$\left. \begin{array}{l} B = \frac{AC}{\sphericalangle} = D \\ M = M \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز}} \triangle ADM \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

توضیح : هرگاه از نقطه ای خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شود ، مربع اندازه مماس با حاصل ضرب

اندازه های دو قطعه قاطع برابر است . ($MT^2 = MA.MB$)



تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید و دلیل خود را برای درستی روش بیان کنید .



حل : اگر T نقطه ای باشد که خط گذرنده از M بر دایره مماس شده است
 آنگاه مثلث MTO قائم الزاویه است و میانه وارد بر وتر نصف وتر است
 (سال قبل اثبات کردیم) یعنی $NM = NO = NT$ پس دایره ای که
 به قطر MO رسم شود از T خواهد گذشت . در نتیجه برای رسم مماس
 کافیست دایره ای به قطر MO رسم کنیم و نقاط برخورد دو دایره را به M وصل کنیم .

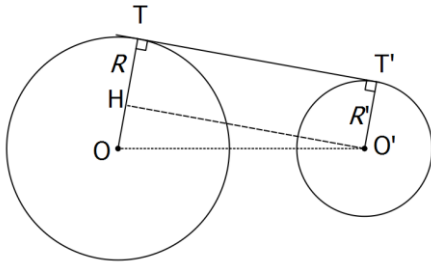
تمرین : ثابت کنید اندازه دو مماس رسم شده بر یک دایره از نقطه ای خارج آن با هم برابرند .

حالت های دو دایره نسبت به هم :

	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره های هم مرکز

طبق جدول مقابل برای اینکه بدانیم دو دایره نسبت به هم چه وضعی را دارند ، بهتر است ابتدا مجموع دو شعاع و تفاضل دو شعاع را بدست آوریم و سپس اندازه فاصله دو مرکز را با دو عدد بدست آمده مقایسه کنیم .
 اگر برابر با یکی از این اعداد باشد مماس درون یا بیرون است (به جدول نگاه کنید)
 اگر عددی بین این ها باشد متقاطع است .
 اگر عددی اطراف اینها باشد متداخل یا متخارج است (به جدول نگاه کنید)

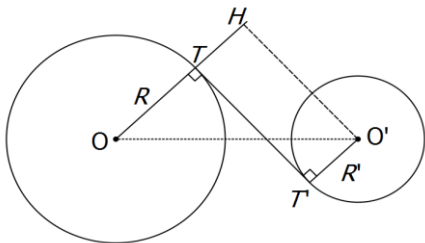
مماس شترک خارجی :



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

می خواهیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های R و R' و طول خط المکزین d را بدست آوریم :
اگر شعاع های OT و $O'T'$ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط $O'H$ را موازی TT' رسم می کنیم و چون چهار ضلعی حاصل مستطیل است مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :

مماس شترک داخلی :

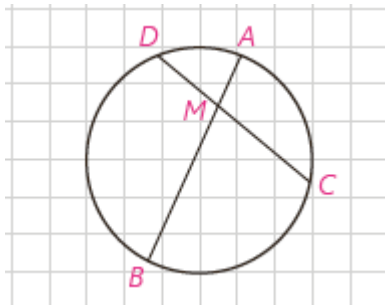


$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

می خواهیم اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع های R و R' و طول خط المکزین d را بدست آوریم :
اگر شعاع های OT و $O'T'$ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط $O'H$ را موازی TT' رسم می کنیم تا امتداد شعاع OT را قطع کند . مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :

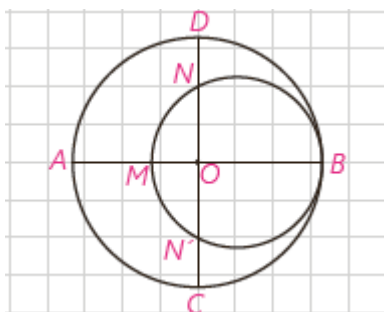
تمرین : دو دایره به شعاع های ۳ و ۴ مماس خارجی هستند . طول مماس مشترک آنها چقدر است ؟

۱- در دایره $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آن گاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

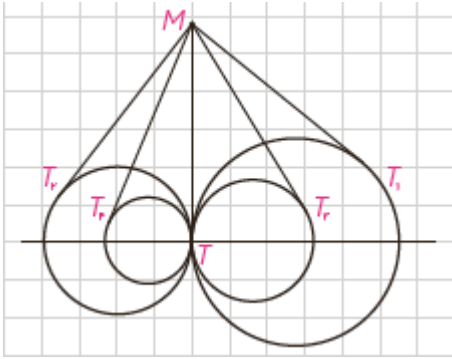


۲- از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول های PB و PC را به دست آورید.

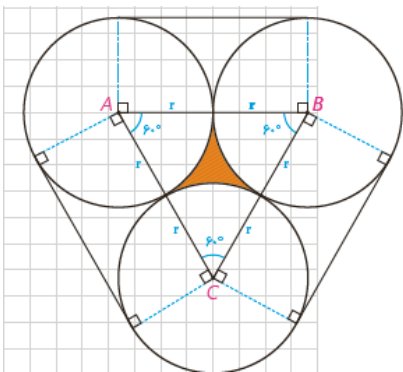
۳- در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.



۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید
 $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$



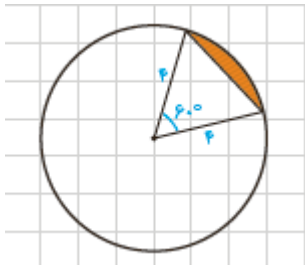
۵- طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المركزین آنها مساوی ۸ واحد است.



۶- سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ محدود است.

۷- طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

۸- مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

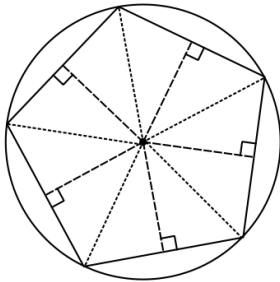
چند ضلعی محاطی : چند ضلعی که تمام رئوس آن روی یک دایره باشد . (آن دایره بر چند ضلعی محیط خواهد بود)

نتیجه : می دانیم تمام نقاطی که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله هستند

روی عمود منصف پاره خط قرار دارند . چرا ؟

پس می توان گفت « چند ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر همه عمود

منصف های اضلاع در یک نقطه همرس باشند » .



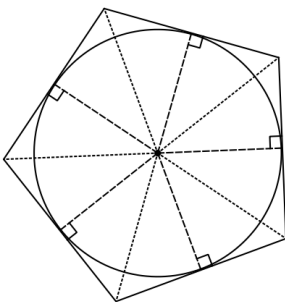
چند ضلعی محیطی : چند ضلعی که تمام اضلاع آن بر یک دایره مماس باشد . (آن دایره در چند ضلعی محاط خواهد بود)

نتیجه : می دانیم تمام نقاطی که از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند

روی نیمساز آن زاویه قرار دارند . چرا ؟

پس می توان گفت « چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر همه نیم

ساز های زاویه ها در یک نقطه همرس باشند » .



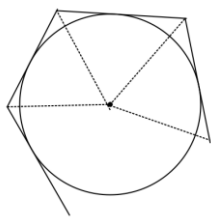
نتیجه : از آنجایی که سال گذشته ثابت کردیم عمود منصف ها و نیمساز های

مثلث همرسند پس مثلث هم چند ضلعی محیطی است و هم محاطی و محل

همرسی عمود منصف های اضلاع، مرکز دایره محیطی و محل همرسی نیمسازها،

مرکز دایره محاطی است .

تمرین: نشان دهید یک n ضلعی محیطی با شعاع دایره محاطی r و محیط P دارای مساحت $S = rp$ است؟

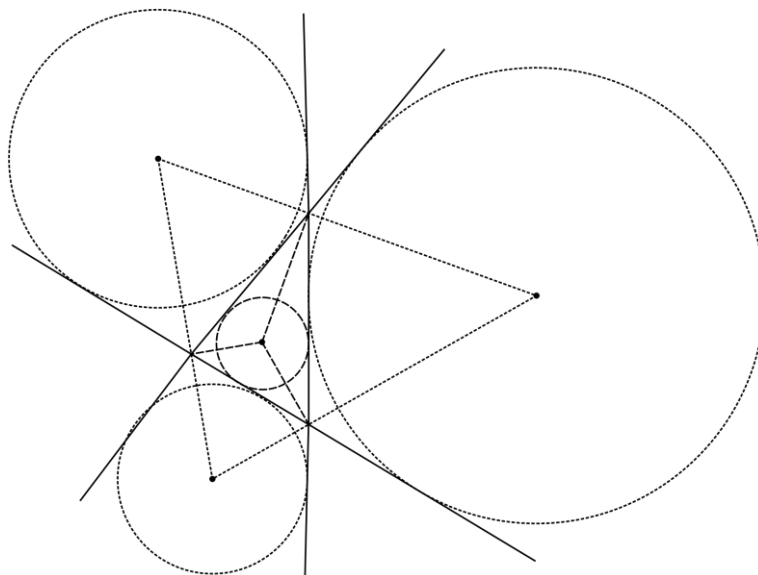


راهنمایی: مساحت n مثلث را بدست آورده (اضلاع لزوماً مساوی نیستند) و جمع کنید.

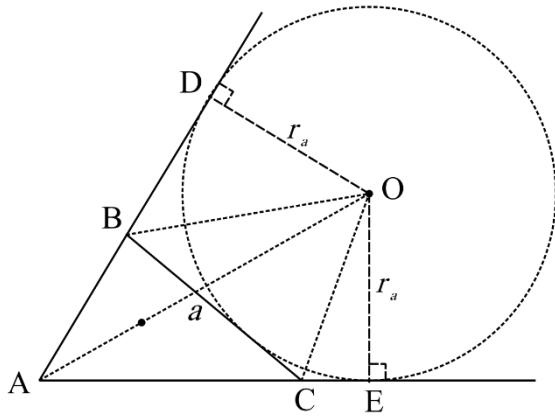
نتیجه: شعاع دایره محاطی هر مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P}$ (P نصف محیط است)

دایره محاطی خارجی و شعاع آن: هر مثلث سه دایره محاطی خارجی نیز دارد که از بیرون بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس هستند و مرکز آنها محل برخورد یک نیمساز داخلی با دو نیمساز خارجی است.

آیا می توانید بگویید چرا نیمساز داخلی و دو نیمساز خارجی هم‌مرس هستند؟



حالا می خواهیم شعاع هر دایره محاطی خارجی را حساب کنیم: در مثلث ABC فرض کنید ضلع مقابل به زاویه A را a شعاع دایره خارجی محاطی مقابل آن را r_a بنامیم حال داریم:



$$S_{ABC} = S_{ADO} + S_{ACO} - S_{BCO} = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$$

از طرفی $\forall p = a + b + c \Rightarrow \forall p - \forall a = b + c - a$

پس داریم: $S = r_a (p - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{p - a}$

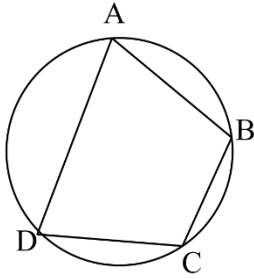
در نتیجه برای دایره های محاطی خارجی دیگر نیز داریم: $r_c = \frac{S}{p - c}$ و $r_b = \frac{S}{p - b}$

تمرین: نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و دایره خارجی محاطی به صورت $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ است.

تمرین: نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و ارتفاع های مثلث به صورت $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ است. ($\frac{1}{h_a} = \frac{a}{\forall S}$)

تذکره: چهار ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو مقابل آن مکمل باشند.

اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محاطی باشد پس :



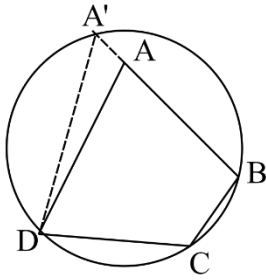
$$A = \frac{BCD}{2}, \quad C = \frac{BAD}{2} \Rightarrow A + C = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

و به همین ترتیب دو زاویه مقابل دیگر نیز مکمل هستند .

حال فرض کنید زاویه های A, C مکمل باشد نشان می دهیم دایره ای

که از سه نقطه B, C, D میگذرد از نقطه A نیز خواهد گذشت و چهار ضلعی

خواهد بود .



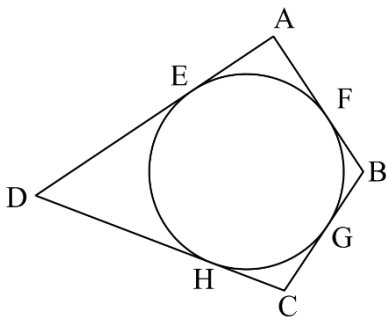
(فرض خلف) فرض کنیم اینطور نباشد و دایره خط BA را در A' قطع کند در این

صورت چهار ضلعی $A'BCD$ محاطی است و A', C مکمل هستند .

پس A و A' هم اندازه خواهند بود که این امکان ندارد در نتیجه A' همان A است .

تذکره : چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اندازه دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه دو ضلع دیگر باشد .

اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محیطی باشد پس :



$$\begin{aligned} AB + DC &= AF + BF + DH + CH \\ &= \underline{AE} + \underline{BG} + \underline{DE} + \underline{CG} \\ &= AD + BC \end{aligned}$$

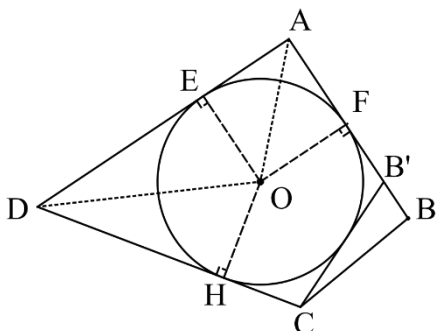
حال فرض کنید $AB + CD = AD + BC$ و نیم سازهای زاویه های

A و D را رسم می کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند فاصله این نقطه از

سه ضلع AD, AB, AC برابر است (چرا ؟) پس دایره ای به مرکز O و شعاع

OE بر این سه ضلع مماس است ثابت می کنیم بر ضلع چهارم نیز مماس

است.



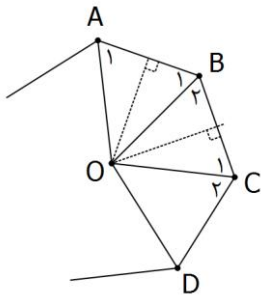
(فرض خلف) فرض کنید این دایره بر BC مماس نباشد از C مماسی بر دایره

رسم می‌کنیم در این صورت چهار ضلعی $AB'CD$ محیطی است و $AB' + CD = AD + B'C$ از تفاضل دو رابطه قبل داریم:

$$AB - AB' = BC - B'C \Rightarrow AB' + BB' - AB' = BC - B'C \Rightarrow BC = B'C + BB'$$

و این رابطه غیر ممکن است زیرا طبق نامساوی مثلثی در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است. پس B' همان B است و دایره بر ضلع BC نیز مماس است.

چند ضلعی منتظم: یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌گویند هرگاه تمام ضلع‌های آن هم اندازه و زاویه‌های آن نیز هم اندازه باشند.



تعمیم: هر چند ضلعی منتظم هم محاطی است و هم محیطی.

عمود منصف‌های اضلاع AB و BC را رسم می‌کنیم تا در O همدیگر را قطع کنند اگر O را به A, B, C وصل کنیم $OA = OB = OC = k$ و بنا به حالت (ض ض ض) مثلث‌های OAB و BOC هم‌نهشت هستند و $A_1 = B_1 = B_2 = C_1 = \alpha$ در نتیجه

$C_2 = \alpha$. حال اگر O را به D وصل کنیم بنا به حالت (ض ز ض) دو مثلث OBC و OCD هم‌نهشتند و $OD = k$.

به همین ترتیب فاصله O از بقیه رئوس نیز برابر k است و این یعنی O مرکز دایره ای است که از رئوس چند ضلعی می‌گذرد و از آنجایی که فاصله O از تمام ضلع‌ها نیز برابر است مرکز دایره ای است که بر اضلاع مماس است و این یعنی چند ضلعی منتظم هم محیطی و هم محاطی است.

تقریب‌های صفحه ۳۹ و ۴۰ :

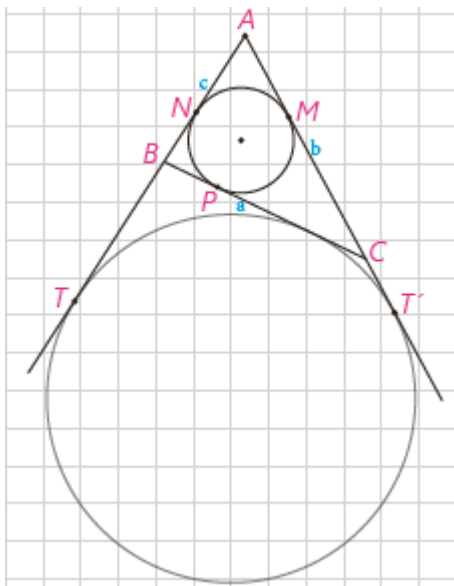
۱- ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

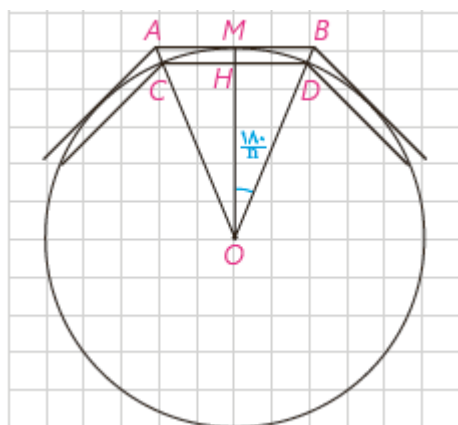
۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۴- یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M ، N و P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:
 $AT=AT'=P$

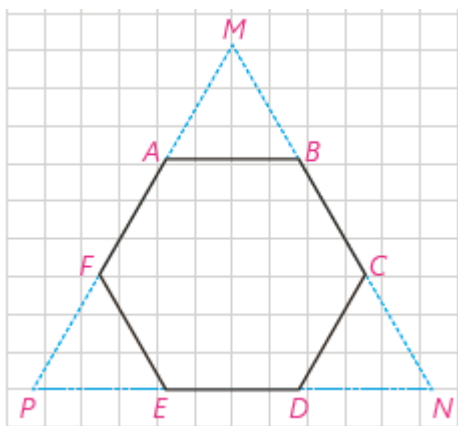


۷- یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$.

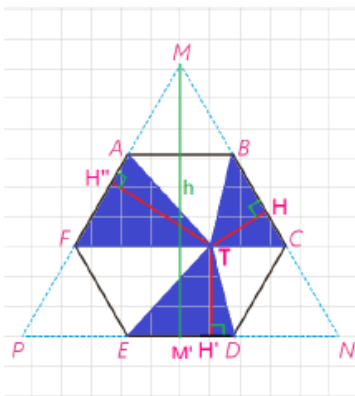


- ۸- شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.
- الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.
- ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.
- پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر ED ، BC و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می دانید، مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟
- ت) مجموع مساحت های مثلث های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



حل قسمت ت :



$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2} AF \cdot TH'' + \frac{1}{2} DE \cdot TH' + \frac{1}{2} BC \cdot TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2} a (TH'' + TH' + TH) = \frac{1}{2} ah$$

$$\Rightarrow S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2} ah$$

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot h \xrightarrow{MN=3a} S_{\triangle MNP} = \frac{3}{2} ah$$

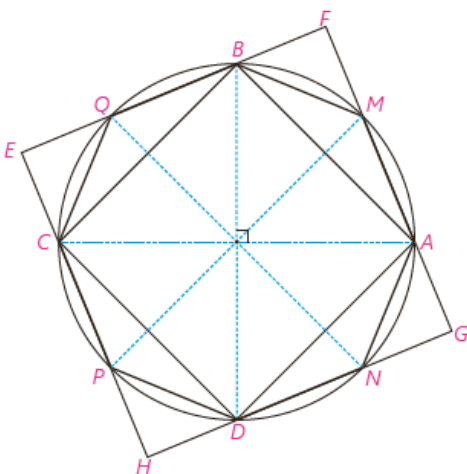
$$\Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{1}{2} ah}{\frac{3}{2} ah} \Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{1}{3}$$

مساحت مثل های آبی رنگ $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش ضلعی $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث

های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث های سفید هم برابر با $\frac{1}{3}$ است بنا براین مساحت مثلث های آبی با مساحت مثلث های سفید برابر است.

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

۹- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف های ضلع های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



فصل دوم : تبدیلات هندسی

دراستی لیا : تبدیلات هندسی

دراستی لیا : کاربرد تبدیلات

درس اول : تبدیلات هندسی